$$\Rightarrow 1 < u_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} 1 < S_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\right)$$

$$\Rightarrow n+1+1-1 < S_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{n+1} 1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + n+1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n+1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant n+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n < S_n \leqslant n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n < S_n \leqslant n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = +\infty$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$